Denken und Mathematik

Gedanken zu möglichen Brückenschlägen zwischen Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik

Sebastian Voß

14. Januar 2016

Inhalt

Dieses Dokument enthält drei Blogartikel, die ich auf meiner Homepage `www.voss89.de` veröffentlicht habe. Der Text ist der Gleiche, allerdings wurde die Formatierung mit LaTeX angepasst und sieht daher meiner Meinung nach hier besser aus. Wenn Sie wollen, können Sie sich die Blogartikel auf diese Weise auch gerne ausdrucken. Für dieses Dokument wie für meinen Blog gilt, dass es sich nicht um wissenschaftliche Artikel, sondern eher um populärwissenschaftliche Artikel handelt. Für die Quellenangaben bedeutet das, dass ich wie in populärwissenschaftlichen Zeitschriften die gesammelten Quellen am Ende des Artikels wiedergebe. Gleichzeitig gebe ich bei konkreten Verweisen aber auch Quellenangaben im Text an. In den Artikeln stelle ich vorhandene Theorien vor (hier vor allem aus dem Buch „Schnelles Denken, langsames Denken“ von Daniel Kahneman) und versuche Brücken zur Mathematikdidaktik zu schlagen.

1 Warum ist Mathematik so schwierig?

„Warum ist Mathematik so schwierig?“ Diese Frage wurde mir nicht nur einmal gestellt und trotz meines Lehramtsstudiums mit dem Fach Mathematik hatte ich keine spontane, gute Antwort darauf parat. In der Fachdidaktik lernt man die Schwierigkeit(en) einzelner Aufgaben ungefähr einzuschätzen; jedenfalls redet man viel darüber. Aber die Mathematik scheint als Ganzes Merkmale zu haben, die sie schwieriger machen als andere Fächer, die in der Schule gelernt werden sollen. In diesem Artikel möchte ich einen psychologischen Blick auf diese Frage werfen, indem ich auf eine Theorie von zwei Denkmodi oder Systemen zurückgreife, die Daniel Kahneman in seinem empfehlenswerten Buch „Schnelles Denken, langsames Denken“ darstellt. Das ist natürlich nur eine von vielen möglichen Perspektiven, nur ein kleiner Beitrag und keine abschließende Antwort. Ich hoffe aber, dass ich hiermit ein paar Einsichten in diese schwierige Frage geben kann.

Dieser Artikel beginnt mit drei Abschnitten über die Funktionsweise der zwei Denksysteme, die Kahneman in „Schnelles Denken, langsames Denken“ beschreibt (genaue Quellenangabe unten) und die ich relativ kurz aus meiner Sicht zusammenfasse. Danach schließe ich mit eigenen Gedanken darüber an, was sich aus dem Theorierahmen von Kahneman für die spezielle Schwierigkeit der Mathematik vermuten lässt.

Zwei Denksysteme

Lösen Sie die folgende Aufgabe im Kopf:

$$13 \cdot 26.$$

Das Lösen dieser Aufgabe erfordert von Ihnen mehrere Schritte: Sie müssen die Rechnung in einfachere Rechnungen wie $10 \cdot 26 + 3 \cdot 26$ zerlegen und sich die Zwischenergebnisse merken, dann müssen Sie die Zwischenergebnisse wieder zu einem Gesamtergebnis zusammenfügen. Das Ganze ist nicht leicht durchzuführen. Sie müssen Ihre Aufmerksamkeit auf die Aufgabe fokussieren und fokussiert halten, um keinen Zwischenschritt zu vergessen. Jeder der einzelnen Rechenschritte geht nur langsam voran, kostet geistige Anstrengung und jeder der Schritte läuft in Ihrem Bewusstsein ab, für das insgesamt nur begrenzte Ressourcen an Aufmerksamkeit und Anstrengung zur Verfügung stehen. Letzteres ist bemerkenswert: Die Lösung der Aufgabe erforderte offenbar unbedingt das bewusste Durchdenken des Problems. Nur deshalb können wir von jedem der Rechenschritte, die zur Lösung nötig waren, berichten und so erzählen, wie wir zu dem Ergebnis am Ende des Denkprozesses gekommen sind. Das ist ein sehr seltenes Phänomen.

Gleichzeitig ist es Ihnen in meiner Beschreibung der Anforderungen der Multiplikationsaufgabe gelungen, die Sätze mühelos und intuitiv zu verstehen. Das Verstehen der Sätze verlief unbewusst und sehr schnell. Auch ohne genaue Prüfung wissen Sie, dass der Satzbau bisher stets korrekt war, denn sonst Sie es sofort bemerkt hätten. Bei der Schreibweise der einzelnen Wörter sind Sie sich vielleicht nicht ganz sicher. Es macht Ihnen nur wenig aus, wnen in Wrtören eniznele Bachustebn vetarschut snid – Sie können trotzdem den Sinn verstehen, solange nur der erste und der letzte Buchstabe an der richtigen Position sind. Und trotzdem macht es für Sie einen echten Unterschied, ob jemand von „Ferien“ oder von „feiern“ schreibt. Ebenso können Sie gut zwischen gleich klingenden Wörtern, wie „Seite“ und „Saite“ unterscheiden. Bei dieser erstaunlichen Leistung wirkt es ziemlich unverständlich, dass Ihnen die Aufgabe „$13 \cdot 26$“ solche Mühe bereitet hat. Doch die Aufgabe, einen Satz zu verstehen, und die Aufgabe, eine Multiplikation durchzuführen werden offenbar völlig unterschiedlich verarbeitet. So können Sie hier nicht von den Schritten berichten, in denen Sie verifiziert haben, dass die Sätze die richtige Satzstruktur hatten – sie wussten es einfach. Genauso wie Sie nicht von den einzelnen Schritten berichten können, in denen das Bild auf Ihrer Netzhaut zu einem dreidimensionalen Eindruck von Ihrer Umgebung wird.

Daniel Kahneman nutzt in seinem Buch „Schnelles Denken, langsames Denken“ für die Beschreibung dieser unterschiedlichen Verarbeitung von Informationen eine Metapher von zwei Denksystemen, die zu unterschiedlichen Operationen in der Lage sind. In dem dadurch aufgeworfenen Rahmen führt er die Forschungen zum menschlichen Urteilen und Entscheiden, für die er den Nobelpreis bekam, auf die Wechselwirkung der beiden Systeme zurück. Er beschreibt diese Systeme als handelnde Akteure, weil es dem intuitiven Denken entgegen kommt und die damit verbundene Information daher leichter zu verarbeiten und zu behalten ist. Dabei warnt er ausdrücklich davor, diese Metapher falsch zu verstehen. Die Systeme sind Fiktion und dienen lediglich dazu, einige Eigenschaften menschlichen Denkens zusammenzufassen, die bestimmte Gemeinsamkeiten aufweisen. Jede aktive Formulierung über die Handlungsweise eines der Systeme ließe sich in eine präzise, passive Formulierung umwandeln, die jedoch schwieriger zu verarbeiten und zu behalten wäre. Im Folgenden werde ich genauso wie Kahneman von den Systemen als Akteuren schreiben.

System 1 arbeitet größtenteils unbewusst, automatisch, sehr schnell und fast mühelos. Nur das Ergebnis dieser Denkprozesse wird Ihnen bewusst – System 1 macht Vorschläge zur Beurteilung einer Situation, es erzeugt Ihre Eindrücke und Intuitionen, die System 2 annehmen kann, sodass sie direkt zu Ihren Überzeugungen werden, oder die es überprüfen und bewusst durchdenken kann. Da die Operationen von System 1 keine oder nur wenig Aufmerksamkeit brauchen, können manche von ihnen gleichzeitig ausgeführt werden. Zu diesen Operationen gehört das Verständnis von (einfachen) Sätzen, das Tippen auf einer Tastatur (wenn Sie darin Übung haben), das Autofahren auf einer leeren Landstraße oder auch die Berechnung von $2 \cdot 2$.

Die Operationen, die ich gerade aufgezählt habe, haben gemeinsam, dass wir sie früher einmal gelernt haben und beim Lernen gingen diese Operationen noch sehr langsam und nur unter Beteiligung des Bewusstseins vonstatten – was uns zu System 2 führt. Dieses arbeitet nämlich gerade langsam und unter Beteiligung des Bewusstseins, was eine (mehr oder weniger starke) Fokussierung der Aufmerksamkeit und geistige Anstrengung erfordert. Zu seinen Fähigkeiten gehört, System 1 umprogrammieren zu können. Das tun Sie zum Beispiel, wenn ich Sie auffordere, alle Kommata in diesem Artikel zu zählen, und das haben Sie getan, als Sie lernten, einfache Sätze zu verstehen oder in reizarmen Umgebungen routiniert Auto zu fahren. Das Zählen von Kommata erfordert offenbar nur eine kleine Umstellung und das Erlernen des Autofahrens oder des Sprachverständnisses eine große Umstellung, die länger dauert. Wichtig ist, dass komplexere Sätze oder Verkehrssituationen, die sich nicht durch (unbewusste, automatische) Routinen bewältigen lassen, weiterhin die Beteiligung von System 2 erfordern. Auch komplexe Berechnungen, wie die Aufgabe $13 \cdot 26$, die Sie oben gelöst haben, lassen sich offenbar nur mithilfe von System 2 lösen. Mit anderen Worten: Das Beachten und Verknüpfen mehrerer, neuer Informationen erfordert stets eine Fokussierung der Aufmerksamkeit, Bewusstsein und geistige Anstrengung. Die begrenzten Ressourcen für diese Anforderungen bedingen, dass das Denken wesentlich langsamer wird und dass die Menge der Informationen, die gleichzeitig beachtet und verarbeitet werden können, äußerst begrenzt ist.

Energieaufwand und geistige Anstrengung

Zur geistigen Anstrengung gehört ein erhöhter Energieaufwand, der mit der Abnahme der Glukosekonzentration im Gehirn in Zusammenhang steht. Und in der menschlichen Evolution galt es, mit der zur Verfügung stehenden Energie klug zu haushalten, was in der Regel bedeutet, sie nur sparsam einzusetzen. Wohl jeder kennt den „inneren Schweinehund", der einen davor bewahrt, sich geistig (oder körperlich) anzustrengen, wenn man genauso gut eine weniger energieaufwendige Alternative wie das Sehen eines Films wählen könnte. Geistige Anstrengung ist meistens unangenehm. Wie oben beschrieben, erfordern die Operationen von System 1, also die Denkprozesse, die unbewusst, automatisch und mühelos ablaufen, sehr viel weniger geistige Anstrengung als die bewussten Denkprozesse von System 2; gleichzeitig liefern uns die Operationen von System 1 aber trotzdem häufig einen zutreffenden Eindruck zur Beurteilung einer Situation und System 2 ist froh, wenn es diesen Eindruck abnicken kann statt die Mühe aufzunehmen, alle relevanten Faktoren langsam und bewusst zu durchdenken. So beurteilen wir viele Situationen unbewusst, schnell, energieeffizient und in manchen Fällen systematisch falsch, weil die unbewussten Funktionsmechanismen von System 1 nicht zur Beurteilung dieser Situation geeignet sind.

Betrachten Sie die folgende Aufgabe, die Kahneman in seinem Buch „Schnelles Denken, langsames Denken" auf Seite 61 beschreibt, und antworten Sie so schnell wie möglich mit der ersten Antwort, die Ihnen einfällt:

> Ein Schläger und ein Ball kosten 1,10 Dollar.
>
> Der Schläger kostet einen Dollar mehr als der Ball.
>
> Wie viel kostet der Ball?

Während System 1 bei manchen Aufgaben, wie $13 \cdot 26$, keine Intuitionen bereit stellt und daher die Hilfe von System 2 anfordert, bietet es in anderen Situationen trügerische, falsche Intuitionen an. In diesem Fall antworteten die meisten Studenten in der entsprechenden Studie mit der intuitiven Antwort „10 cent", obwohl schon ein wenig geistige Anstrengung gereicht hätte, um diese Antwort als falsch zu entlarven und auf die richtige Antwort „5 cent" zu kommen. Geistige Anstrengung ist oft unangenehm und wird häufig vermieden, wenn mühelos und schnell erhaltene Intuitionen bereitstehen. Diese beruhen aber offenbar nicht auf mathematischer Logik, sondern auf den Funktionsmechanismen von System 1, die sich aus unserer Evolution und unserer persönlichen Lebenserfahrung ergeben.

Das assoziative Gedächtnis und das Streben nach assoziativer Kohärenz

Kahneman stellt in seinem Buch viele der Funktionsmechanismen von System 1 vor, von denen ich hier nur einen stark verkürzten Abriss gegeben habe. Im Fall des Schläger-Ball-Problems mag die Organisation des Gedächtnisses, auf das System 1 Zugriff hat, schon eine Erklärung liefern. Im Gedächtnis sind nach Kahneman (sehr weit gefasste) Vorstellungen verschiedener Art repräsentiert und miteinander verbunden oder assoziiert, wenn sie mit nur kurzen zeitlichen Abständen zusammen auftraten. Wenn nun durch eine Aufgabe oder einen anderen Reiz eine Vorstellung im Gedächtnis aktiviert wird, werden auch weitere Vorstellungen (etwas schwächer) aktiviert, die damit assoziiert sind.

Ich stelle mir eine mögliche Erklärung für die „10 cent"-Antwort so vor: Beim Lesen des Schläger-Ball-Problems werden im ersten Satz vermutlich automatisch die Assoziationen „Schläger – Ball – 1 Dollar – 10 cent" geknüpft, denn man liest „ein Dollar und 10 (cent)". Im zweiten Satz wird dann die Assoziation „Schläger – 1 Dollar" geknüpft, womit für den Ball automatisch die Assoziation zu „10 cent" übrig bleibt. Diese Hypothese ließe sich überprüfen, indem man das Schläger-Ball-Problem noch einmal stellt und nun behauptet, dass der Schläger 80 cent mehr als der Ball koste. Nach meiner Hypothese müsste der Anteil, der nun behauptet, der Ball koste 30 cent, deutlich geringer sein.

Unabhängig davon, ob meine Hypothese richtig ist oder nicht, ermöglicht mir die Vorstellung des assoziativen Gedächtnisses den Übergang zu einer weiteren Eigenschaft von System 1, die Kahneman in seinem Buch darstellt: Es neigt dazu, Aussagen zu bestätigen und Zweifel zu unterdrücken. Stellen Sie sich folgende Situation vor: „Lisa ging zur Bank“. Diese Aussage löst Assoziationen bei Ihnen aus, die Lisa mit einer Bank in Verbindung bringen. Wenn Sie vor kurzer Zeit mit Geld zu tun hatten, dann werden Sie sich vorgestellt haben, wie Lisa in ein Gebäude ging und Geld abholte; wenn Sie hingegen kürzlich in einem Park waren, werden Sie vielleicht daran gedacht haben, wie Lisa in einem Park spazieren ging und sich dort auf eine Bank setzte. Sie werden jedoch nicht an beides gleichzeitig gedacht haben und sofern Sie Ihre Interpretation nicht bewusst hinterfragten, wird sie Ihnen eindeutig vorgekommen sein. Die assoziative Aktivierung im Gedächtnis erzeugt ein kohärentes Muster von Vorstellungen und der Grad der Kohärenz bestimmt meistens, wie sehr wir von diesem Muster von Vorstellungen überzeugt sind. Und zu dem Satz „Lisa ging zur Bank“ lässt sich leicht ein kohärentes Vorstellungsmuster aufbauen, solange keine widersprechende Interpretation zur Sprache kommt. Dies sind Operationen von System 1; sie laufen schnell, mühelos und größtenteils unbewusst ab. Bewusst wird uns ein Eindruck davon, ob die Aussage stimmt oder nicht. Zweifel an diesem Eindruck und das Suchen nach Gegenbeispielen, die die Aussage widerlegen könnten, sind hingegen Aufgaben von System 2; sie laufen eher langsam und bewusst ab und sie kosten geistige Anstrengung. Deshalb wird System 2 gewöhnlich erst dann aktiviert, wenn sich kein assoziativ kohärentes Muster einstellen will und die Auflösung der Widersprüche eine größere Anstrengung erfordert. Der Satz „Cäsar war ein großer römischer Politiker“ ruft andere Assoziationen hervor als der Satz „Cäsar war ein römischer Diktator“, wobei die Assoziationen die jeweiligen Aussagen bestätigen werden. Es fällt uns schwer, beide Aussagen zusammen zu akzeptieren, da sie ein inkohärentes Muster ergeben, in dem Cäsar gleichzeitig ein großer Politiker und ein Diktator ist. Wir streben stets nach assoziativer Kohärenz, auch wenn die Wirklichkeit diese vielleicht nicht immer hergibt.

Metakognition

Kommen wir zurück zur Mathematik. In zahlreichen Studien wurde belegt, dass Schüler, die höhere Werte für das Konstrukt „Metakognition“ erzielen, auch bessere Leistungen in Mathematik erbringen (siehe dazu einen Überblicksartikel von Schneider und Artelt, 2010). Zur Metakognition zählt die Planung, Kontrolle und Reflexion der eigenen Gedanken und mit unserem Wissen über die zwei Systeme können wir den Befund zur Metakognition in einen größeren Rahmen einordnen. Offenbar ist das Konstrukt „Metakognition“ ein Teil des Konstruktes „System 2“. Die Planung bedeutet eine Verlangsamung des Denkens und das bewusste Festlegen einer Reihenfolge, in der über die anstehenden Aufgaben nachgedacht werden soll, Kontrolle bedeutet das Anzweifeln der eigenen Eindrücke und Überzeugungen und schließlich bedeutet Reflexion das Bewusstmachen der Vorgehensweise, der Schwierigkeiten und Weiteres. Das alles sind Operationen von System 2. Mit dieser Einordnung lässt sich behaupten, dass die Schüler mit höheren Werten bei der Metakognition mehr geistige Anstrengung investiert haben und dass sie häufiger ihr Denken verlangsamt und bewusst gemacht haben. Vermutlich aktivieren sie auch bei anderen Anforderungen, die nicht unter das Konstrukt Metakognition fallen, häufiger ihr System 2 und schaffen es dadurch besser, mehrere Informationen zu beachten und zu verknüpfen.

Die Schwierigkeit der Mathematik – eine Annäherung

Um den Artikel nicht zu lang werden zu lassen, möchte ich an dieser Stelle mit einer ersten Annäherung an die Frage „Warum ist Mathematik so schwierig?“ enden. Wir haben zwei verschiedene mathematische Aufgaben kennen gelernt; die erste Aufgabe, $13 \cdot 26$, war ein rein innermathematisches Problem und uns wurde sofort klar, dass wir es intuitiv, also mithilfe von System 1, nicht lösen können. Das Problem ist in einer abstrakten symbolischen Darstellung repräsentiert, die System 1 nicht verarbeiten kann. Es kann Vorstellungen von 13 Äpfeln, 13 Birnen, 13 Bäumen usw. aktivieren, aber es hat nur eine sehr grobe Vorstellung von der abstrakten Anzahl oder Vielfachheit „13“. Dementsprechend fehlen uns unsere Intuitionen bei der Lösung von innermathematischen Aufgaben und wir müssen sie mit unseren begrenzten Ressourcen für System 2 lösen.

Kniffliger wird es bei Aufgaben, die einen außermathematischen Kontext haben, so wie das Schläger-Ball-Problem. Der Kontext der Aufgabe ermöglicht uns teilweise einen intuitiven Zugang zur Aufgabe, der uns verlockend mühelos erhaltene Antworten zur Lösung anbieten kann. Doch diese Intuitionen, die System 1 uns anbietet, beruhen nicht auf mathematischer Logik und sind daher häufig falsch. Gleichzeitig kann uns jedoch der Kontext eine konkretere Vorstellung von den Anforderungen der Aufgabe bieten und dadurch auch eine richtige Lösung fördern, indem System 1 Vorschläge für Lösungen bzw. Ansätze macht und System 2 diese überprüft und durch Argumente belegt oder widerlegt.

Wichtig ist in jedem Fall eine Aktivierung der begrenzten Ressourcen von System 2 und damit eine Verlangsamung des Denkens, das (oft unangenehme) Investieren geistiger Anstrengung und das Anzweifeln intuitiver Ahnungen. Dies ist zum Teil bereits durch die Studien zur Metakognition belegt. Im Gegensatz zu den meisten anderen Fächern, die auf Sprache beruhen, haben wir kaum einen intuitiven, mühelosen Zugang zu den Themen der Mathematik. Damit will ich nicht behaupten, dass in anderen Fächern keine geistigen Anstrengungen unternommen werden müssten oder unbelegte Ahnungen stets übernommen werden könnten. Ich behaupte, dass wir in Fächern, die auf Sprache basieren, viel besser von unseren Intuitionen unterstützt werden als in mathematikbasierten Fächern und dass das Anzweifeln der Intuitionen, die uns im Alltag so gut und zugleich mühelos führen, erst sehr mühsam erlernt werden muss.

Unbewusst gewonnene mathematische Erleuchtungen!?

Zum Abschluss möchte ich verdeutlichen, dass dieser Artikel ganz bestimmt keinen Abschluss darstellt. Neben vielen inhaltsspezifischen Aspekten, die man erläutern könnte, möchte ich einen Bericht des großen französischen Mathematikers Henri Poincaré erwähnen, in dem er schildert, dass er auf einer geologischen Expedition, die ihn seine mathematische Arbeit vergessen ließ, plötzlich einen genialen Einfall zu einem speziellen mathematischen Zusammenhang hatte. Später, als er genügend Zeit dazu hatte, verifizierte er das Ergebnis und überzeugte sich so von der Wahrheit seiner Ahnung (beschrieben in dem Buch „Denken. Wie das Gehirn Bewusstsein schafft" von Stanislas Dehaene auf S. 116 ff.).

Poincarés Erlebnis ist ein Beispiel für eine plötzliche mathematische Erkenntnis, die offenbar weitgehend unbewusst erworben wurde (tatsächlich bedarf es für eine solche Einsicht zumindest eine intensive, bewusste Beschäftigung mit einem entsprechenden Problem, auch wenn diese vorerst ergebnislos bleibt). Das Verifizieren dieser Erkenntnis hingegen ist eine Aufgabe, die nur System 2 übernehmen kann. Aber wir sollten System 1 auf keinen Fall unterschätzen. Es verfügt über viel größere Ressourcen als System 2 und erzeugt damit den Großteil unserer Überzeugungen – häufig auch die, die wir für bewusst und rational durchdacht halten. System 1 bietet System 2 Eindrücke und Ahnungen an, die System 2 im Sinne eines energieeffizienten Arbeitens nur selten überprüft und oft übernimmt, sodass sie zu unseren (ggf. im Nachhinein rationalisierten) Überzeugungen und Entscheidungen werden. Unser Wissen über die Operationen der beiden Systeme geht zwar inzwischen weit über Mutmaßungen hinaus, aber sie sind immer noch lange nicht ganz verstanden. Und somit bleibt auch unklar, unter welchen Bedingungen System 1 doch in der Lage ist, mathematische Erkenntnisse zu erzeugen. Im nächsten Artikel werde ich allerdings einen Ansatz zu dieser Frage wagen.

Quellen

- Dehaene, Stanislas (2014): *Denken. Wie das Gehirn Bewusstsein schafft.* 1. Auflage. Knaus-Verlag.
- Kahneman, Daniel (2015): *Schnelles Denken, langsames Denken.* 14. Auflage. Pantheon-Ausgabe.
- Schneider, Wolfgang und Cordula Artelt (2010): *„Metacognition and mathematics education."* In: ZDM Mathematics Education (42). S. 149 -161.

2 Mathematische Darstellungen und deren kognitive Verarbeitung

Im letzten Blogartikel haben Sie gesehen, dass Mathematik in besonderer Weise die begrenzten Ressourcen für unser System 2, für unser langsames, bewusstes und mit Aufmerksamkeitsfokussierung sowie geistiger Anstrengung verbundenes Denken, beansprucht. Wir alle erleben regelmäßig, dass unsere Ressourcen für dieses Denken tatsächlich sehr begrenzt sind. Auch in einer ruhigen Umgebung mit wenig ablenkenden Reizen können wir uns kaum mehr als 7 Zahlen auf einmal merken – wie also ist es den Mathematikern gelungen, so eine komplexe Wissenschaft aufzubauen? Wie im vorherigen Blogartikel kann ich nur einen kleinen Einblick in diese Frage geben, der in diesem Beitrag auf die mathematischen Darstellungen fokussiert.

Darstellungen verringern geistige Anstrengung: Funktion als expliziter Wissensspeicher

Am Anfang des letzten Blogartikels habe ich Sie aufgefordert $13 \cdot 26$ im Kopf zu berechnen, was Sie mit etwas geistiger Anstrengung wahrscheinlich auch hinbekommen haben. Aber es gibt wohl nur wenige, die es schaffen, 113*226 im Kopf zu berechnen. Dennoch lernen schon Grundschulkinder, wie man das Ergebnis dieser Multiplikation ohne Taschenrechner herausbekommt: Sie zerlegen das Problem und schreiben sich Zwischenergebnisse auf. So simpel das heute für uns klingt, war die Erfindung der Schrift auch für die Mathematik ein echter Durchbruch, um unsere begrenzten Ressourcen zu umgehen und unser Gedächtnis zu erweitern. Aber trotzdem lassen sich damit noch längst nicht alle Probleme überwinden. Wenn wir uns Zwischenergebnisse, Voraussetzungen oder gesuchte Größen aufschreiben, dann sind wir immer noch daran gebunden, dass wir eine Zerlegung des Problems finden, die es zulässt, dass für jedes Teilproblem nur so viele Informationen gleichzeitig berücksichtigt werden müssen, wie wir uns gleichzeitig merken und wie wir gleichzeitig verarbeiten können.

In der Einleitung zu diesem Artikel habe ich geschrieben, dass wir uns nur etwa sieben Zahlen auf einmal merken können - das war nicht ganz korrekt. Wie viele Zahlen man sich tatsächlich merken kann, hängt nicht nur von der individuellen Merkfähigkeit und den eventuell ablenkenden Umgebungsreizen ab, sondern auch von der Sprache. Chinesen kommen auf etwa neun Zahlen, die sie sich merken können – die Forscher führen dies aber nicht auf die höhere Merkfähigkeit zurück, sondern auf die Zahlnamen, die im Chinesischen wesentlich kürzer sind als z. B. im Deutschen (vgl. Dehaene 2011, S. 89).

Dieser Befund zeigt uns, dass die Eigenschaften der Darstellung auch dessen Verarbeitung beeinflussen. In diesem Fall betrifft die Verarbeitung die Aussprache der Darstellung. In anderen Fällen hingegen ist die Darstellung selbst bereits so unübersichtlich, dass sich die Darstellung nicht mehr gut als Wissensspeicher eignet und über die Zeit kaum noch benutzt wurde oder gar verloren gegangen ist.

Eine stark verkürzte Geschichte der Zahldarstellungen

Zu den ersten Zahldarstellungen gehörten Striche, die aneinander gereiht wurden. Doch schon nach kurzer Zeit wird diese Darstellung unübersichtlich und unpraktisch: Sie brauchen lange, um zu erkennen, dass ||||||||| die Zahl 9 darstellt. Eine einfache Abhilfe bietet eine Restrukturierung in Fünferblöcke, die es bei kleinen Zahlen schon deutlich vereinfacht, die Zahl zu erkennen. Doch der Vorteil dieser Restrukturierung bleibt letztendlich auf relativ kleine Zahlen beschränkt – bei der Zahl 132 sind Fünferblöcke wiederum ziemlich unübersichtlich und unpraktisch.

Es musste eine andere Darstellung für die Zahlen gefunden werden und es wurden viele neue entwickelt. Eine Darstellung, die uns bis heute noch relativ gut bekannt ist, sind die lateinischen Zahldarstellungen: I, II, III, IV, V, ... Hier werden in regelmäßigen Abständen neue Buchstaben eingeführt, um die größer werdenden Zahlen nicht zu unübersichtlich werden zu lassen: X für 10, L für 50, C für 100, D für 500 usw. Das macht die Schreibweise für die Zahl 500 zwar außerordentlich kurz, aber gleichzeitig sind viel kleinere Zahlen wie XXXVII (37) bereits sehr unübersichtlich und es ist schwer, diese schnell zu erfassen. Neben diesem Nachteil braucht man außerdem immer wieder neue Zeichen, wenn man große Zahlen schreiben (und lesen) will. Alles in allem kostete diese römische Zahldarstellung immer noch zu viele kognitive Ressourcen, um sich durchzusetzen.

Durchgesetzt hat sich schließlich die indisch-arabische Zahldarstellung. Zu den zentralen Errungenschaften gehören hier ein konsequentes Stellenwertsystem und die Zahl 0. Das Stellenwertsystem bedeutet, dass z.B. die letzte 2 in 222 für zwei Einer steht, die mittlere dagegen für zwei Zehner und die vordere für zwei Hunderter. Anders als bei der römischen 37 oben hat die Stelle, an der die Ziffern stehen also immer eine Bedeutung, die jede Ziffer von den anderen unterscheidet. Dem liegt wiederum eine Menge von zehn verschiedenen Ziffern zugrunde, die in Kombination mit Zehnerpotenzen, also 1, 10, 100, ... aber auch 0,1; 0,01; ..., und einem Vorzeichen jede beliebige (rationale) Zahl darstellen können. So lässt sich $120,45$ zerlegen in

$$1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,01.$$

Selbst große Zahlen lassen sich noch sehr übersichtlich und auf die immer gleiche Weise darstellen. Selbstverständlich hat auch dies irgendwann ein Ende, weil irgendwann zu viele Ziffern vorhanden sind, aber in diese Größenbereiche kommen wir selten (wenn es nicht gerade um die Staatsverschuldung geht). Zudem wächst die Unübersichtlichkeit, gemessen an der Anzahl der Ziffern, nur logarithmisch mit der Größe der Zahl.

Wichtig ist außerdem die Zahl 0. In früheren Darstellungen ließ man die Stellen, an die wir heute eine Null schreiben einfach frei, doch das führt schnell zu Verwirrung (ist das nun eine freie Stelle oder nur ein großer Zwischenraum?) und manche Zahlen lassen sich gar nicht unterscheiden (z.B. 1 und 10, 100, ...). Die Null ermöglicht dagegen die klare Kennzeichnung des „Nichts“ und so natürlich uns diese Zahl heute vorkommt, so schwierig war es für unsere älteren Zeitgenossen, diese Zahl tatsächlich als Zahl zu akzeptieren, obwohl sie doch „Nichts“ bezeichnete.

Die indisch-arabische Zahldarstellung ermöglicht nicht nur eine übersichtliche Darstellung von Zahlen, sondern ebenfalls effiziente Schreibweisen für arithmetische Verfahren. Das erkennen Sie schnell an folgender Addition:

```
1238
+ 502
___1_
1740
```

Diese Schreibweise funktioniert nur deshalb, weil Sie ein konsequentes Stellenwertsystem nutzen. Wenn Sie das gleiche mit den römischen Zahldarstellungen (MCCXXXVIII + DII) versuchen wollten, würde es nicht funktionieren.

Darstellungen verringern geistige Anstrengung: Funktion als impliziter Wissensspeicher

Wir können also feststellen, dass es eine Entwicklung der Zahldarstellungen gegeben hat, in deren Verlauf die Darstellung der Zahlen unseren kognitiven Ressourcen angepasst wurde, indem sich die Darstellungen, die effizienter zu verarbeiten waren und die effizientere Schreibweisen ermöglichten, gegenüber weniger effizienten Darstellungen durchsetzten (vgl. dazu auch Dehaene 2011).

Auf diese Weise fungieren die Darstellungen auch als impliziter Wissensspeicher. Kinder, die heute lernen mit den indisch-arabischen Zahldarstellungen umzugehen, müssen nicht mehr lernen, warum sich diese Darstellung durchgesetzt hat und warum sie besonders effizient zu verarbeiten ist. Sie können von den Errungenschaften ihrer mathematischen Vorgänger profitieren, indem sie einfach nur die gleichen Notationen verwenden.

Die Anpassung von Darstellungen an unsere kognitiven Möglichkeiten beschränkt sich im Übrigen nicht auf die Zahldarstellungen. Diese sind sogar ein relativ extremes Beispiel, weil sich die ganze Darstellungsart verändert. Häufig genügt es schon, einen Sachverhalt mit der gleichen Darstellungsart anders zu formulieren und damit anders darzustellen, damit der Sachverhalt kognitiv einfacher zu verarbeiten ist (also verständlicher wird). Das gilt auch für Sätze, die, wie Sie selbst wissen, schwierig oder einfach verständlich sein können, obwohl beide in derselben Schriftart und derselben Sprache geschrieben sind. Ein prominentes Beispiel aus der Mathematik ist die Differentialrechnung, die sowohl von Newton als auch von Leibniz erfunden wurde. Die beiden stellten ihre Überlegungen jedoch mit unterschiedlichen Notationen dar, sodass es zum (auch von den politischen Verhältnissen beeinflussten) „Wettstreit“ der Notationen kam. Durchgesetzt hat sich schließlich zum größten Teil die Notation von Leibniz, die effizientere Schreibweisen erlaubte, begrifflich klarer war und auf dem europäischen Kontinent weitere Verbreitung fand als die Notation von Newton, die sich nur auf der großbritannischen Insel eine Weile halten konnte.

Unterschiedliche Darstellungen als Repräsentanten desselben Sachverhalts

Für die Differentialrechnung und alle anderen modernen mathematischen Gebiete reichen die oben angesprochenen numerischen Darstellungen (also Darstellungen für Zahlen) natürlich nicht aus. Die Mathematiker haben verschiedene Darstellungsarten entwickelt, um über mathematische Sachverhalte nachzudenken. Das können Sie in der Abbildung unten gut am Beispiel einer quadratischen Funktion erkennen. Dadurch kann derselbe Sachverhalt auch durch unterschiedliche Zeichen dargestellt werden, die jeweils unterschiedliche Vor- und Nachteile haben, da sie unterschiedliche Aspekte betonen und unterschiedliche Zugänge bieten.

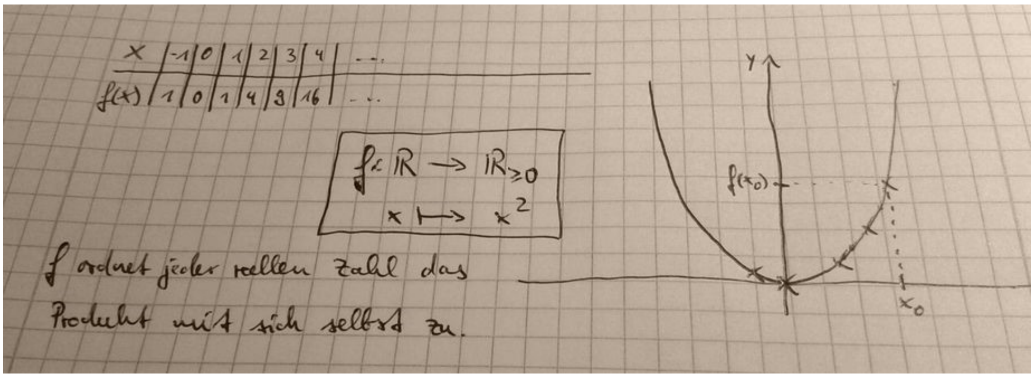


Abbildung 1: Darstellungsarten für eine quadratische Funktion: Tabellarisch, symbolisch / formal, graphisch / bildlich und sprachlich.

Es gibt unterschiedliche Kategorisierungen der vielen verschiedenen Darstellungsarten, die in der Mathematik verwendet werden. Eine recht einfache Unterscheidung bietet die Kategorisierung der Darstellungsart als Handlung, Bild, Zeichen oder Sprache (diese Einteilung wird in Kratz (2011), S. 136, beschrieben; angelehnt ist das an die klassische Einteilung von Jerome Bruner in enaktiv, ikonisch und symbolisch). Der Darstellung als Handlung kommt am Gymnasium und in der Wissenschaft Mathematik eine untergeordnete Rolle zu, weshalb ich diese hier ausklammern will. Die Sprache hingegen nimmt eine besondere Rolle ein. Weil sie, wie im letzten Artikel geschildert, weitgehend automatisch und mühelos verarbeitet wird, kann sie unterstützend mitwirken, wenn über bildliche oder formale („zeichenhafte") Darstellungen gesprochen wird. Diese bildlichen und formalen Darstellungen bilden meist den Kern der mathematischen Darstellungen: Zahlen können mit den formalen indisch-arabischen Ziffern dargestellt werden oder als Punktmengen, Funktionen können durch eine formale Funktionsvorschrift oder durch einen Graphen dargestellt werden, für formale Terme gibt es ebenfalls Visualisierungen in Form von Flächeninhalten oder ähnlichem, der Satz des Pythagoras lässt sich unter der Voraussetzung, dass ein entsprechendes, rechtwinkliges Dreieck gegeben ist, mit $a^2 + b^2 = c^2$ oder auch durch die Flächeninhalte der entsprechenden Quadrate an dem Dreieck darstellen. Es gibt noch viele Beispiele mehr, wie Graphen, Diagramme, Skizzen und Zeichnungen zur Visualisierung von formalen Zusammenhängen genutzt werden. Und dafür gibt es (mindestens) einen Grund.

Betrachten Sie das folgende Bild:

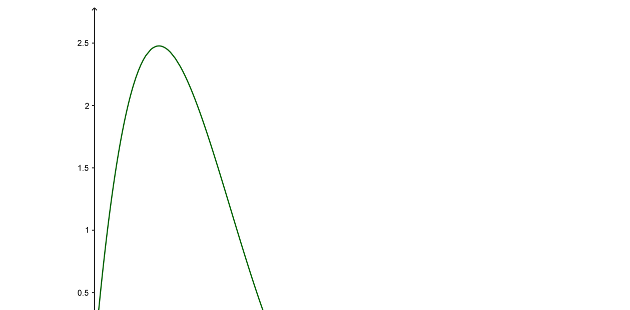


Abbildung 2: Ein Graph mit zwei Hochpunkten.

In dem Bild können Sie automatisch, schnell und mühelos erkennen, dass der Graph der abgebildeten Funktion einen höchsten Punkt hat und es erscheint Ihnen vollkommen einleuchtend, wenn man diesen Punkt als „Hochpunkt“ bezeichnet. Sie erkennen auch sofort, dass es noch einen zweiten Punkt gibt, der in einem bestimmten Bereich ebenfalls als (lokaler) Hochpunkt bezeichnet werden kann. Das beruht auf der visuell-räumlichen Wahrnehmung der Darstellung, wobei hier die Wahrnehmung von Abständen und Winkeln zwischen dem Graph und den Achsen gemeint ist und nicht die dreidimensionale Wahrnehmung, die aber an anderer Stelle auch dazu gehören kann. Diese visuell-räumliche Wahrnehmung ist eine Operation von System 1 und die Verwendung von bildlichen Darstellungen ermöglicht somit die Unterstützung des limitierten Systems 2 durch System 1. Und in diesem Fall handelt es sich tatsächlich um eine Unterstützung und keine Verzerrung, weil den Abständen zwischen dem Graphen und den Achsen ja tatsächlich eine Bedeutung zukommt. Daher ist die Visualisierung von Daten und formalen Zusammenhängen bis heute sowohl in der Schule als auch in der Wissenschaft ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Sachverhalte. Wohl auch aus diesem Grund gehörte die Geometrie neben der Arithmetik zu den am frühesten entwickelten Themengebieten der Mathematik.

Dennoch reicht es nicht, auf dieser intuitiv zugänglichen, bildlichen Darstellungsebene zu bleiben, die uns so leicht verständlich scheint. Oder können Sie mir etwa die genauen Koordinaten der Hochpunkte nennen? Zu den Nachteilen von System 1 gehört, dass es in dieser Beziehung nicht sehr präzise arbeitet. Und zum Teil trügt es uns sogar. Sie haben im obigen Bild absolut keine Möglichkeit, zu erkennen, dass die zweite Nullstelle von links bei $x = 1,49$ liegt und nicht bei $1,5$. Daher gehört es zu den schwierigen und komplizierten Schritten in der Schule und in der Wissenschaft, die bildlich erkannten Zusammenhänge oder Phänomene formal präzise zu erfassen, was notwendigerweise die Beteiligung von System 2 erfordert, wie wir schon im letzten Blogartikel gesehen haben. Das führt dann zu der formalen Übersetzung des optischen Eindrucks:

> Sei f eine Funktion mit dem offenen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$; außerdem sei h ein Element des Definitionsbereichs. Der Punkt $(h, f(h))$ heißt (lokaler) Hochpunkt, wenn es ein $e > 0$ gibt, sodass für alle x aus $]h - e, h + e[$ gilt:
>
> $f(x) < f(h)$.

Sie merken, dass Ihnen das Verständnis dieser Definition sehr viel mehr Mühe abverlangt und dass ihr Denken langsamer wird – Sie müssen Ihr System 2 aktivieren, um sie zu verstehen. Und das obwohl die Definition als Mischung aus verbaler und formaler Darstellung präsentiert ist. Zudem können Sie die explizite Benennung der Voraussetzungen sehen, die notwendig ist, um den zweiten Satz sinnvoll formulieren zu können. Das trägt zur Präzision und zum besseren Verständnis des Phänomens Hochpunkt bei, weil sehr viel mehr Eigenschaften bewusst gemacht werden müssen, aber es macht das Verständnis auch mühevoller. (Wenn Sie nicht alle Einzelheiten verstehen, ist das nicht schlimm. Hinter so einer Definition verstecken sich noch ein paar Hintergedanken, die ich hier nicht ausführlich ausbreiten möchte, weil die Definition auch so demonstriert, was ich beschrieben habe.)

Unterschiedliche Darstellungen für unterschiedliche kognitive Zugänge

So lassen sich die unterschiedlichen Darstellungen, die in der Mathematik heute benutzt werden, als Werkzeuge verstehen, die eine lange Entwicklung zur Steigerung der Effizienz bei der kognitiven Verarbeitung hinter sich haben. Das betrifft sowohl die Darstellungsart als auch die jeweilige Formulierung mit einer bestimmten Darstellungsart. Dabei hat jede der verschiedenen Darstellungsarten andere kognitive „Verarbeitungskanäle“ angesprochen und wurde für diese weiterentwickelt. So sprechen bildliche Darstellungen unter anderem die visuell-räumliche Wahrnehmung (System 1) an, während formale Darstellungen die bewusste Verarbeitung (System 2) erfordern und dadurch Präzision ermöglichen. Insbesondere gibt es aber keine so klare Trennung wie im letzten Artikel angedeutet, dass nur System 2 Mathematik betreiben kann, auch wenn ein großer Teil der Mathematik (heute) in formaler Darstellung repräsentiert wird. Durch bildliche (und auch sprachliche) Darstellungen verschaffen die Mathematiker immer wieder ihrem System 1 Zugang zur Mathematik und eröffnen dadurch die Möglichkeit, die unglaublich großen Kapazitäten von System 1 anzuzapfen. Durch die geeignete Zerlegung und Darstellung von Problemen lässt sich die notwendige geistige Anstrengung und Aufmerksamkeitsfokussierung auf ein Maß herunterbrechen, das uns die Lösung des Problems erst ermöglicht.

Für die Schule bedeuten die verschiedenen Verarbeitungsmöglichkeiten der Darstellungen, dass die Schüler in der Regel zuerst mit einer bildlichen Darstellung von Zusammenhängen vertraut gemacht werden sollten, weil diese sich einfacher verarbeiten lässt und ein erstes Grundverständnis ermöglicht. Erst danach sollte der Übergang zur formalen Darstellung folgen und dieser muss langsam stattfinden, um die begrenzten Ressourcen von System 2 nicht zu überlasten. Wichtig ist aber auch, dass dieser Übergang nicht ausgelassen werden darf, weil sonst die Präzision der formalen Darstellung nie erreicht wird.

Sowohl die bildlichen als auch die formalen Darstellungen sollten stets von Verbalisierungen begleitet werden, also um einen dritten, sprachlichen Zugang ergänzt werden. Zu guter Letzt müssen die Schüler in die Lage versetzt werden, flexibel zwischen den Darstellungsarten hin und her zu wechseln, um sich selbst den für sie besten Zugang zu den Problemen zu verschaffen, die sie lösen wollen. Diese Forderungen sind im Übrigen nicht neu, sondern lange bekannt (sie sind z.B. auch bei Kratz 2011 beschrieben). Ich habe Sie hier lediglich in Zusammenhang mit den Denksystemen gebracht, die ich im letzten Artikel beschrieben habe.

Moderne Darstellungen

Am Ende dieses Artikels möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass wir ganz sicher nicht am Ende der Entwicklung der Darstellungen für die Mathematik stehen. Die sprachliche Darstellung war eine der oben erwähnten Darstellungsarten und ich denke, dass man darunter nicht nur unsere Muttersprache, nicht einmal nur die gesprochenen Sprachen verstehen sollte. Unsere Zeit wird geprägt von den Umbrüchen, die Programmiersprachen uns ermöglichen und diese werden unter anderem genutzt, um mathematische Formeln und Verfahren auszudrücken. Auch wenn wir noch nicht besonders viel darüber wissen, gehen wir davon aus, dass verschiedene gesprochene Sprachen unser Denken auch über Mathematik beeinflussen. Und dasselbe sollten wir annehmen, wenn wir mithilfe von Programmiersprachen über Mathematik nachdenken und Mathematik darstellen. Wie die verschiedenen Sprachen unser Denken beeinflussen, ist jedoch noch völlig unerforscht.

Quellen

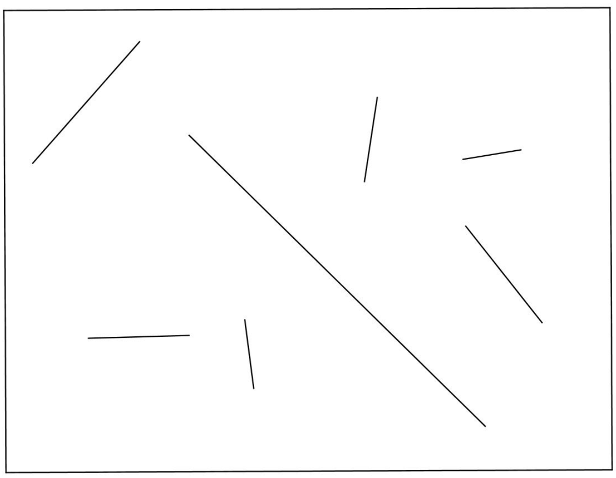
- Dehaene, Stanislas (2011): The Number Sense. How the Mind creates Mathematics. Revised and Updated Edition. Oxford University Press.
- Kahneman, Daniel (2015): *Schnelles Denken, langsames Denken.* 14. Auflage. Pantheon-Ausgabe.
- Kratz, Henrik (2011): Wege zu einem kompetenzorientierten Unterricht. 1. Auflage. Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

3 Statistisches Lernen und das Erkennen mathematischer Strukturen

Im ersten Blogartikel habe ich beschrieben, dass Mathematik in besonderer Weise die begrenzten Ressourcen für unser System 2 erfordert, und im letzten Artikel die Frage gestellt, wie es trotz der begrenzten Ressourcen zu der heutigen komplexen Mathematik kommen konnte. Einen ersten Ansatz dazu habe ich im letzten Artikel ebenfalls beschrieben, nämlich, dass sich mathematische Sachverhalte durch unterschiedliche Darstellungen erfassen lassen, die teilweise einen besseren Zugang für System 1 erlauben (bildliche Darstellungen). In diesem Artikel möchte ich eine weitere Operation von System 1 vorstellen, die zur Entwicklung und zum Lernen von Mathematik beiträgt. Sie ermöglicht uns das Erkennen mathematischer Strukturen.

Lernen als statistischer Prozess

Betrachten Sie das folgende Bild:



Nach Daniel Kahneman zeigen Studien, dass Probanden durchaus gute Schätzungen abgeben, wenn man sie auffordert, eine Strecke mit der durchschnittlichen Länge der abgebildeten Strecken zu zeichnen. Das gilt hingegen nicht, wenn man sie auffordert, eine Strecke mit der Gesamtlänge der abgebildeten Strecken zu zeichnen. Kahneman nutzt diesen Befund mit einem ähnlichen Bild in seinem Buch „Schnelles Denken, langsames Denken“ als einfaches Demonstrationsbeispiel dafür, wie Menschen Mengen repräsentieren, nämlich durch einen Durchschnittswert mit einer gewissen Varianz. Das führt dazu, dass die durchschnittliche Streckenlänge durchaus gut abgeschätzt werden kann, aber die summarische Streckenlänge nicht (vgl. Kahneman 2015, S.121f).

Stellen Sie sich dazu noch folgende Situation vor: „Die große Maus kletterte über den Rüssel des sehr kleinen Elefanten.“ Sie werden sich vorstellen, wie eine Maus, die nicht größer ist als ein Schuhkarton, über den Rüssel eines Elefanten klettert, der größer als ein Sofa ist (auch dieses Beispiel stammt von Kahneman 2015, S. 100). „Maus“ und „Elefant“ sind Kategorien oder Namen für eine Menge von Tieren und sie haben eine Vorstellung davon, wie eine Maus oder ein Elefant normalerweise aussieht. Und normal meint, wie diese Tiere im Durchschnitt aussehen, wobei eine gewisse Varianz erlaubt ist. Das macht es unwahrscheinlich, dass die Maus in ihrer Vorstellung größer als der Elefant oder auch nur etwa genau so groß wie der Elefant gewesen ist.

So einen durchschnittlichen Elefanten, für den eine gewisse Varianz erlaubt ist, nennen wir einen Prototyp für einen Elefanten. Ein anderes mögliches Wort dafür ist die Norm eines Elefanten, weil dadurch festgelegt wird, was für einen Elefanten normal ist. Die Bildung eines solchen Prototypen oder einer Norm geschieht automatisch, größtenteils unbewusst und mühelos – sie ist eine Operation von System 1. Und sie bildet in vielen Bereichen das ab, was wir als „Lernen“ bezeichnen. Wenn wir das erste Mal einen Elefanten sehen, dann besteht die gesamte Kategorie (oder Menge) „Elefant“ aus diesem ersten Individuum und wenn wir in dieser Situation von „Elefant“ reden, dann meinen wir genau dieses Individuum mit all seinen Eigenheiten. Doch wir lernen schnell von unseren Mitmenschen, dass es noch andere Tiere gibt, die fast genauso aussehen und auch als Elefant bezeichnet werden. „Elefant“ wird vom Namen eines Individuums zum Namen einer Menge von Tieren und diese ist dadurch repräsentiert, dass alle grau, ziemlich groß und schwer sind, dass sie einen Rüssel haben usw. Diese Eigenschaften gehören zum Durchschnitt der Elefanten, die Ihnen begegnet sind, und sie ergeben zusammen einen Prototyp eines Elefanten. Andere Eigenschaften wie Narben oder Hautmusterungen werden Sie nur bei einzelnen Tieren gefunden haben, weshalb diese nicht zum Durchschnitt gehören. So haben wir anhand unserer Beobachtungen gelernt, was die Kategorie „Elefant“ ausmacht, indem wir immer weiter von den Eigenheiten einzelner Tiere absahen. Wir nahmen nur noch das als Eigenschaften der Menge an, was für alle Elefanten ungefähr galt, indem wir die Menge der Elefanten, die wir gesehen haben, durch einen prototypischen Durchschnittselefanten mit einer gewissen Varianz repräsentierten.

Die Varianz für die verschiedenen Merkmale Ihres Prototyps ist jedoch unterschiedlich groß. Bei den Eigenschaften, die sich kontinuierlich anpassen lassen, so wie Größe, Gewicht und Farbton, enthält Ihr Prototyp keine präzise Größe, denn hier kann die Varianz recht groß werden. Andere Merkmale wie der Besitz eines Rüssels sind hingegen notwendige Bedingungen; bei diesen gibt es keine Varianz. So sind wir teilweise zu „harten“ Kriterien gelangt (Besitz eines Rüssels – ohne Varianz) und teilweise zu „weichen“ Kriterien (ungefähre Größe, . . .).

Mit der Zeit werden Sie einen ziemlichen guten Prototyp gebildet haben, zu dem auch Elefanten passen, die Sie noch nie vorher gesehen haben, denn sie liegen innerhalb der von Ihnen erlernten Varianz. Sie haben in dieser Beziehung scheinbar „ausgelernt“ und das legt den zweiten Begriff der „Norm“ vielleicht eher nahe als er Ihnen oben erschienen ist. Zu diesem Zeitpunkt kann Ihnen niemand mehr eine Maus als Elefanten verkaufen. Wenn Ihnen dieser Satz zu absurd vorkommt, dann denken Sie daran, dass Sie sowohl Maus als auch Elefant als Säugetier kennen, dass es also durchaus eine gemeinsame Kategorie für Maus und Elefant gibt.

Nehmen wir nun an, dass Sie bisher nur afrikanische Elefanten gesehen haben und nun zum ersten Mal auf einen indischen Elefanten treffen. Dies wird Sie überraschen: Ein Tier, das in vielen Bereichen gut zu Ihrer Norm passt und dennoch systematisch davon abweicht. Überraschungen beruhen auf Erwartungen, die verletzt werden. Erwartungen können sehr stark und daher bewusst sein, weswegen man von expliziten Erwartungen spricht. Das wäre im obigen Beispiel vielleicht der Fall gewesen, wenn Sie den indischen Elefanten in einem Zoo gesehen hätten und sie vorher auf der Karte gesehen haben, dass dort das Elefantengehege ist, sodass sie explizit die Ihnen bekannten afrikanischen Elefanten zu sehen erwartet haben. Häufiger sind implizite, unbewusste Erwartungen, die Ihnen erst bewusst werden, wenn sie verletzt werden, zum Beispiel wenn ein Wort nicht trinkt. Sie hatten beim letzten Satzende keine explizite Erwartung, welches Wort nach „nicht“ kommen würde, aber das Wort „trinkt“ gehörte sicher nicht zu den Wörtern, die sich im Kontext des Satzes erwarten ließen. Solche Überraschungen werden nach Kahneman innerhalb von zwei Zehntelsekunden erkannt, wie neuropsychologische Studien gezeigt haben (vgl. Kahneman 2015, S. 99).

Eine Erwartung lässt sich als Vorhersage verstehen, die auf Ihrem bisherigen Wissen beruht, und eine Überraschung ist dann ein Vorhersagefehler, der etwas Unpassendes in Ihrem bisherigen Wissen aufdeckt. Insofern sind Überraschungen Initiatoren für einen Lernprozess, bei dem Normen angepasst werden. Im obigen Beispiel werden Sie nun die Kategorie „Elefant“ erweitern und evtl. gleich zusätzlich die Untergruppen „Afrikanischer Elefant“ und „Indischer Elefant“ bilden, um die systematischen Unterschiede abzubilden. Wenn man so will, kann man den kompletten Lernprozess von der ersten Begegnung mit einem Elefanten an als Folge von Überraschungen verstehen, nach denen die Norm angepasst wurde. Aber üblicherweise sprechen wir von Norm und Überraschung erst, wenn der Lernprozess schon weiter fortgeschritten ist, denn vorher werden „Überraschungen“ quasi erwartet. Insofern spricht man anfangs eher von Prototypen statt von Normen.

Wir besitzen Normen oder Prototypen für alle möglichen Kategorien oder Mengen: Tiere, Restaurantbesuche, Bäume, Vorstellungsgespräche, Autos, gute Taten, Freunde, die Kategorie „Freund“, Lehrer, Ärztinnen, angemessenes Verhalten usw. . . Wenn Sie sich fragen, wie „man“ sich in Situation XY verhält, dann wollen Sie vermeiden, andere zu überraschen, indem Sie gegen deren Norm verstoßen. Denn Sie wissen, dass die anderen Ihr unpassendes Verhalten als Lernanlass nehmen würden – in dem Fall würden sie aus Ihrem unpassenden Verhalten auf Sie schließen. Sie wären nun der Neue, die Querschlägerin, der Unangenehme oder die Außergewöhnliche.

Kurz: Lernen lässt sich in weiten Teilen als statistischer Prozess verstehen (und modellieren, vgl. Frith 2014), in dem anhand von Beobachtungen ein Durchschnitt und eine Varianz ermittelt werden, die zu einem Prototyp oder einer Norm von einer Menge zusammengefasst werden. Zum Prototyp gehört das, was allen Elementen der Menge gemeinsam ist, wobei dies ungefähr (mit einer gewissen Varianz) oder als hartes Kriterium (ohne Varianz) gegeben sein kann. Durchschnitt und Varianz sind dabei sehr allgemein aufzufassen: Unser Prototyp eines Elefanten enthält keine Zahlenwerte für den Durchschnitt und die Varianz, sondern eher einen durchschnittlichen visuellen Eindruck. Dieser lässt sich zwar teilweise verbalisieren und ungefähr quantifizieren, aber dabei handelt es sich um zusätzliche Denkoperationen, die an die Vorstellung des eigentlichen Prototyps anknüpfen. Ebenso können wir sagen, ob ein bestimmtes Verhalten normal, also durchschnittlich ist oder nicht, ohne dass wir dafür einen numerischen Durchschnittswert angeben können. Das Erstellen von Prototypen und die Beurteilung von Normalität ist eine Operation von System 1, wohingegen exakte Quantifizierungen eine Operation von System 2 sind.

Als Erklärung für dieses statistische Lernen stelle ich mir Folgendes vor: Unsere Vorstellungen werden durch Aktivitätsmuster in der Aktivität unserer Neuronen enkodiert. Diese Aktivität wird durch die Verknüpfungen der Neurone untereinander bestimmt, weil sich die Aktivität nur darüber ausbreiten kann. Die neuronalen Verknüpfungen in unserem assoziativen Netzwerk werden jedes Mal verstärkt, wenn sie benutzt werden. Wenn sie aber nicht benutzt werden, verfallen sie mit der Zeit (das bekannte Prinzip „Use it or loose it“). Wenn wir nun mehrmals hintereinander Elefanten sehen und für die gleichen Assoziationen mit dem Elefanten (Farbe, Größe, Form, ...) auch die gleichen Verknüpfungen genutzt werden, dann werden diese Verknüpfungen verstärkt, während seltene Assoziationen wie bestimmte Narben nur lose verknüpft bleiben. Wenn wir nun an die Menge der Elefanten denken, dann werden nur die Neuronen, deren Verknüpfungen eine gewisse Stärke aufweisen, aktiviert. Und dadurch wird automatisch der Prototyp der Menge, in dem sich die durchschnittlichen, gemeinsamen Merkmale vereinen, erzeugt.

Lernen von Mathematik

Betrachten Sie die folgenden Rechnungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ &\dots \end{aligned}$$

Wenn Sie sich ein wenig mit den Rechnungen beschäftigen, werden Sie bald einige Regelmäßigkeiten erkennen:

- Auf der linken Seite wird immer ein Summand mehr addiert; auf der rechten Seite steht immer nur eine Zahl (das Ergebnis).
- Alle Summanden auf der linken Seite sind aufeinander folgende ungerade Zahlen; als nächster Summand wird stets die nächste ungerade Zahl gewählt, wobei die bisherigen Summanden stehen bleiben.
- Die Zahlen auf der rechten Seite sind die aufeinander folgenden Quadratzahlen.
- Die Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen, bei 1 beginnend, ergibt immer eine Quadratzahl.

Zudem überraschen Sie diese Regelmäßigkeiten wahrscheinlich. Es entspricht nicht Ihrer Norm von allgemeinen Rechnungen, dass sich darin so viele Regelmäßigkeiten wiederfinden. Das macht diese Menge von Rechnungen besonders und interessant.

„Regelmäßigkeit“ ist hier (und in den meisten anderen Fällen) ein anderer Ausdruck für „Gemeinsamkeit“ oder „Invariante“. Und genau das meint auch der Begriff „Struktur“: Eine Invariante (Unveränderliche) in einer Menge. Dass die Mathematik auch als Strukturwissenschaft bezeichnet wird, zeigt, dass es in großen Teilen der Mathematik darum geht, Strukturen zu erkennen, zu formulieren und zu nutzen.

Wir nutzen Strukturen zum Beispiel zur Definition von Objekten. Die Menge der Quadrate ist dadurch definiert, dass alle Elemente vier gleich lange Seiten haben, zwischen denen ein rechter Winkel besteht. Die Menge der quadratischen Gleichungen ist dadurch definiert, dass sie sich auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Zahlen a, b, c bringen lassen, wobei a nicht gleich 0 sein darf. Wir formulieren Strukturen, indem wir unsere natürliche Sprache oder die algebraische Symbolsprache benutzen. Und meine Hypothese ist, dass wir Strukturen erkennen, indem wir die Mengen, über die wir reden, durch Prototypen repräsentieren. So wie wir erkennen, dass alle Elefanten einen Rüssel haben, erkennen wir auch, dass alle obigen Rechnungen etwas gemeinsam haben.

Wenn wir uns vergegenwärtigen, dass unsere Wahrnehmungen, Gefühle und Gedanken durch neuronale Aktivitätsmuster enkodiert werden, dann macht es wohl keinen prinzipiellen Unterschied, ob wir den Durchschnitt von Größen, Farbtönen, Verhaltensweisen oder mathematischen Objekten wie den obigen Rechnungen bilden. Und mathematische Strukturen zeichnen sich schließlich dadurch aus, dass sie invariant sind, also harte Kriterien bilden. Sie sind ein Durchschnitt ohne Varianz.

Anders als bei den Strecken und den Elefanten weiter oben im Artikel geht es hier aber nicht um einen visuellen, bildlichen Prototyp, der von System 1 erstellt werden kann. Die Verarbeitung formal-symbolischer Darstellungen erfordert die Unterstützung von System 2 und ich denke, dass das Erkennen mathematischer Strukturen dementsprechend als Wechselwirkung der beiden Denksysteme verstanden werden kann. System 2 ermöglicht ein Verständnis der Darstellung, was z. B. bedeuten kann, dass die Darstellung in eine andere Darstellung oder Vorstellung übersetzt wird oder mit geeigneten Beispielen verknüpft wird. Dadurch kann System 1 Vorschläge für einen Prototyp machen, die System 2 wiederum präzisiert und formal-symbolisch formuliert. Die Rechnungen oben können uns ein paar Beispiele geben: Wenn Sie zunächst nur die Teilmenge der Additionen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens betrachten, dann erkennen Sie sofort, dass stets ein Summand dazukommt. Diese Eigenschaft der numerischen Darstellungen drückt sich schon bildlich durch die Stufenform aus. Dann betrachten Sie die Summanden: Sie alle sind in Ihrem assoziativen Netzwerk mit dem Namen „ungerade Zahl" verknüpft, sodass die mühelos zu verarbeitende sprachliche Darstellung Sie auch auf diese Struktur bringt. Die dahinter stehende mathematische Struktur, dass alle diese Zahlen beim Teilen durch 2 den Rest 1 lassen, springt Ihnen wahrscheinlich nicht sofort ins Auge, sondern erfordert eine aktive Suche in Ihrem Gedächtnis. Auf diese Weise dient der Begriff jedoch als mühelos zu verarbeitender Anker, der auf eine komplexere Struktur verweisen kann. Außerdem sehen Sie durch die entsprechende Wiederholung in den Zeilen, dass die Terme immer mit 1 beginnen, worauf die nächsten ungeraden Zahlen folgen. Diese Strukturen waren alle recht leicht zu erkennen. Gleichzeitig dient vielleicht ein leichter zu behaltender Prototyp der Art „Summe ungerader Zahlen" zur internen Repräsentation der Terme.

Betrachten Sie als Nächstes die Menge der Zahlen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. Wenn Sie diese Zahlen nicht bereits als Quadratzahlen kennen und hier wiederum der Begriff als Anker für die mathematische Struktur greift, dann werden Sie die Struktur der Zahlen nicht sofort erkennen. Dazu muss dann System 2 aktiviert werden und gezielt nach Gemeinsamkeiten suchen, was z. B. über eine Faktorzerlegung geschehen kann, die offenbart, dass sich 4 als $2 \cdot 2$, 9 als $3 \cdot 3$ und 16 als $4 \cdot 4$ schreiben lässt. Hier kann wiederum System 1 ansetzen, denn es handelt sich bei den Zahlen stets um dieselben geometrischen Formen, die durch ein Sternchen voneinander getrennt werden. Wenn zudem noch erkannt wird, dass sich auch 1 als $1 \cdot 1$ schreiben lässt, dann lässt sich diese geometrische Intuition von System 2 auch so formulieren, dass die Zahlen auf der rechten Seite jeweils das Produkt der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen mit sich selbst sind (bei 1 beginnend). Als einfacher, assoziierter Prototyp dient vielleicht die Vorstellung „Quadratzahlen".

Betrachten Sie nun die Menge der Gleichungen, also jede Zeile als Element. Wie Sie relativ schnell erkannt haben, steht auf der linken Seite immer eine Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen (bei 1 beginnend) und auf der rechten Seite immer eine Quadratzahl und nun erkennen Sie durch das immer gleiche Zeichen „=", dass beide gleich groß sind. Sie können die bisher erkannten Strukturen miteinander verknüpfen, was in diesem Fall auf der sprachlichen Darstellungsebene passiert ist. Die Verknüpfung der Informationen legt nahe, dass dazu System 2 erforderlich ist, aber es kann ebenfalls vermutet werden, dass es Unterstützung durch System 1 erfährt, indem es die von System 2 präzise ausformulierten Prototypen der beiden Teilmengen intern aufrecht erhält.

Indem Sie also verschiedene Teilmengen betrachten und diese durch Prototypen repräsentieren, stoßen Sie schließlich auf das Gemeinsame, die Struktur in den Teilmengen der Rechnungen und der gesamten Menge der Rechnungen. Es wird Ihnen leicht fallen, die nächsten Glieder in der Folge der Rechnungen zu formulieren, weil Sie die jeweilige Struktur der Teilmengen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens erfasst haben. Und Sie werden davon ausgehen, dass auch für diese neuen Rechnungen die vorher erkannte Struktur gilt, denn bisher fügte sich jede Rechnung ohne Abweichung in Ihren Prototyp ein. Das wird auch als Abstraktion oder als induktiver Schluss beschrieben.

Vermutlich kommt Ihnen dieser induktive Schluss ziemlich überzeugend vor. Sie haben eine empirisch-statistische Evidenz von fünf Rechnungen, die diesen Schluss belegen und das ist schon gar nicht schlecht. Wenn Sie sich an den ersten Blogartikel erinnern, erinnern Sie sich vielleicht auch an die assoziative Kohärenz. Die oben aufgeführten Rechnungen weisen durch den gemeinsamen Prototyp ohne Abweichung eine starke assoziative Kohärenz auf. Um sicher zu gehen, werden Sie intuitiv noch ein paar weitere Rechnungen anstellen und wenn Sie bei 10 oder 15 Rechnungen angelangt sind, scheint Ihnen die Evidenz wahrscheinlich ausreichend, um von Ihrem Schluss auf die zugrundeliegende Struktur völlig überzeugt zu sein. Genauso gehen Sie schließlich im Alltag ständig vor, meist werden Sie sogar schon nach nur zwei bis drei Beispielen von Ihrem Schluss auf die Struktur überzeugt sein, und Sie sind sehr erfolgreich damit. Doch den Mathematikern reicht das nicht. Sie haben ein paar unangenehme Überraschungen erlebt, in denen die statistische Evidenz überwältigend war und der vermutete Zusammenhang doch nicht galt und das hat ihre Norm von „Beweis“ nachhaltig verändert. Mathematische Zusammenhänge müssen durch Argumente und deduktive Schlüsse bewiesen werden.

Das Erkennen von Strukturen und die Denksysteme

Ich habe bereits oben beschrieben, dass das Schätzen einer durchschnittlichen Länge eine Operation von System 1 ist, also schnell, mühelos und größtenteils unbewusst abläuft. Ebenso erkennen Sie auch die Symmetrie eines Quadrats, eines Kreises oder einer Parabel, wobei man vor diesem Hintergrund die Symmetrieachse bzw. den Symmetriepunkt als durchschnittliche Lage der gesamten Punktmenge auffassen kann. Wie schon im zweiten Blogartikel geschrieben, bekommen wir über ikonische (bildliche) Darstellungen einen guten Zugang zu den Strukturen, weil diese in bildlichen Darstellungen durch Längen und Winkel dargestellt werden, die System 1 verarbeiten kann.

Ich denke, dass auch die Darstellung $1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 3, 4 \cdot 4, \ldots$ bereits einen starken geometrischen Eindruck erzeugt, der System 1 die Struktur $a \cdot a$ bzw. a^2 erkennen lässt. Anders ist es bei 1, 4, 9, 16, ... oder 1, 3, 5, 7, 9, ... - dass diese Zahlen eine gemeinsame Struktur haben, ist nicht an der Darstellung zu erkennen. Hier kann es sein, dass die Zahlen bekannt sind und daher alle die gleiche Assoziation hervorrufen („Quadratzahlen“ bzw. „ungerade Zahlen“), was wiederum eine Operation von System 1 ist. Falls dies jedoch nicht der Fall ist, bedürfen die Zahlen einer näheren Untersuchung und ggf. einer anderen Darstellung, bei der mehrere Informationen beachtet und miteinander verknüpft werden müssen, was die Aktivierung von System 2 erfordert. Das gilt auch für das Erkennen der Struktur in den obigen Rechnungen, dass die Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen, beginnend bei 1, immer eine Quadratzahl ergibt. Und spätestens bei der präzisen Formulierung der Struktur ist die Aufmerksamkeitsfokussierung und geistige Anstrengung, die nur System 2 aufbringen kann, unbedingt notwendig. Dennoch denke ich, dass System 2 beim Erkennen von Strukturen insgesamt eine viel bessere Unterstützung von System 1 erfährt als z.B. beim Kopfrechnen.

Vielleicht habe ich die Fähigkeiten von System 1 in Bezug auf Zahlen auch etwas untertrieben. Wir besitzen durchaus eine Art „Zahlensinn“, der es uns erlaubt, Zahlen intern durch eine ungefähre Vielfachheit oder Magnitude zu repräsentieren und sie dadurch zu verarbeiten. Dieser Magnitude kann eine räumliche Vorstellung (in Form einer Länge) zugrunde liegen (vgl. Dehaene 2011). In diesem Kontext lässt sich diese interne Magnitude einer Zahl vielleicht als Prototyp aller Mengen verstehen, die die gleiche Anzahl haben (z.B. 3 Bäume, 3 Mäuse, 3 Elefanten, 3 Menschen, 3 Häuser, 3 Punkte, 3 Quadrate, ...). Als Gemeinsamkeit so unterschiedlicher Mengen bleibt nur die Anzahl übrig. Abgesehen von dieser Spekulation lässt sich aber festhalten, dass die Repräsentation von Zahlen durch eine ungefähre Magnitude eine Operation von System 1 sein muss, weil diese schnell und mühelos erfolgt. Dies ermöglicht uns schnelle, grobe Schätzungen für Rechnungen und es wird die Strukturerkennung in den obigen Rechnungen erleichtern, aber für die präzise Verarbeitung von Zahlen und die präzise Formulierung von Strukturen ist System 2 zuständig.

Am Ende des ersten Blogartikels habe ich eine Geschichte erwähnt, in der der Mathematiker Poincaré von einer plötzlichen mathematischen Eingebung berichtet, und ich habe das als Beispiel dafür angeführt, dass die mathematischen Fähigkeiten unseres Systems 1 nicht unterschätzt werden sollten bzw. teilweise noch gar nicht bekannt sind. Bei Poincarés Eingebung ging es um die Identität zweier Gruppen von Transformationen und vielleicht machen die Ausführungen in diesem Kapitel schon etwas verständlicher, dass das Unbewusste diese Abstraktion leisten konnte, bei der es schließlich auch um zwei Mengen geht, die anscheinend den gleichen Prototypen haben. Das bleibt jedoch an dieser Stelle eine vage Spekulation.

Didaktische Erklärungen und Folgerungen

Mit dem dargestellten statistischen Lernprozess lassen sich jedoch eine ganze Reihe an didaktischen Phänomenen erklären oder didaktischen Folgerungen ziehen. Dazu gehören:

- Regelverständnis: Während eine „mathematische“ Regel absolut und immer gilt, sind bei einer „statistischen“ Regel durchaus Ausnahmen (Ereignisse, die relativ stark vom Durchschnitt abweichen) erlaubt. Letzteres entspricht unserem intuitiven Regelverständnis und es muss deutlich gemacht werden, dass Ausnahmen bei einer mathematischen Regel nicht erlaubt sind. Der bekannte Spruch „Ausnahmen bestätigen die Regel“ gilt hier nicht.

- Kognitiver Konflikt: Schüler bringen aus dem Alltag viele Konzepte mit, die aus wissenschaftlicher Sicht falsch oder zumindest unpassend sind. Ein bekanntes didaktisches Manöver besteht darin, die Erwartungen, die aus diesen Alltagskonzepten entstehen, gezielt zu verletzen, sodass ein „kognitiver Konflikt“ entsteht, weil das bisherige Wissen nicht trägt. Wie erwähnt, sind solche Vorhersagefehler starke Lernanlässe, weil wir immer danach streben, alle unsere Assoziationen von Vorstellungen kohärent zu gestalten. Zum Beispiel denken viele Schüler, dass Socken (Kleidung insgesamt) immer warm halten. Wenn man jedoch einen Eisblock in einen Socken packt und einen weiteren daneben legt und vergleicht, welcher der beiden schneller schmilzt, stellt man fest, dass der Socken nicht generell warm hält, sondern nur den Wärmeaustausch verringert und somit isoliert. Hier wurde die statistische Basis um eine Beobachtung erweitert, die zur Anpassung des zugrundeliegenden Konzepts führen kann, wenn dies geeignet angeleitet wird. Ansonsten kann dieses Phänomen auch als „Ausnahme“ abgetan werden.

- Übergeneralisierung: Bei manchen Regeln wird der Gültigkeitsbereich zu groß angenommen, weil über lange Zeit keine Negativbeispiele behandelt werden. So wird zum Beispiel bei allen möglichen Rechnungen eine überwältigende statistische Evidenz für die Gültigkeit des Distributivgesetzes oder „ähnlicher“ Gesetze (vgl. die proportionale Funktion unten) gesammelt. Das ist in so unterschiedlichen Beispielen wie

$$\begin{gathered}
2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4; \\
2 \cdot (3-4) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4; \\
\frac{1}{2} \cdot (3+4) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4; \\
(3-4) : 2 = 3 : 2 - 4 : 2; \\
\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6}; \\
\text{bei einer proportionalen Funktion f:} \\
f(2+3) = f(2) + f(3);
\end{gathered}$$

der Fall gewesen und da ist es kein Wunder, wenn ein Fehler wie das Linearisieren der Wurzelfunktion ($\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$) oder das falsche Auflösen einer binomischen Formel ($(a+b)^2 = a^2 + b^2$) auftritt. Es ist auch einigermaßen schwierig, diesen Fehler zu vermeiden, weil dazu eine neue Kategorie aufgemacht werden muss, obwohl der Ausdruck doch so gut in die alte Kategorie zu passen scheint und die statistische Evidenz dort sehr groß ist, sodass diese Ausnahme – statistisch gesehen – nicht unbedingt der Regel widersprechen muss. Dazu kommt, dass die Rückmeldung zu diesem Fehler in der Regel nicht unmittelbar erfolgt, sondern erst verzögert beim Vergleichen der Aufgaben. Dies erschwert es, die Assoziation zwischen der falschen Regel und der Erkenntnis „das war ein Fehler“ zu knüpfen, weil dazu beide Vorstellungen zeitlich nah beieinander liegen müssen (vgl. den Abschnitt im ersten Blogartikel zum assoziativen Gedächtnis).

  Durch das Stellen entsprechender Aufgaben kann es auch zu unerwünschten, übergeneralisierten Lerneffekten kommen wie „Bei Matheaufgaben müssen immer alle Zahlenangaben im Aufgabentext genutzt werden“, „Das Ergebnis ist fast immer ganzzahlig“ oder „Matheaufgaben lassen sich immer eindeutig lösen“.

- Lernen abstrakter Regeln: Abstrakte Regeln werden offenbar aus Beispielen generiert und behalten einen prototypischen Charakter. Laut Büchter und Leuders (2014, S. 66) berichten selbst erfahrene Mathematiker, dass sie über abstrakte Regeln und Objekte eher über Prototypen verfügen als über deren abstrakte Formulierung.

  Das Verständnis abstrakter Regeln wird dementsprechend nicht dadurch erreicht, indem man die abstrakt formulierte Regel präsentiert (und dann üben lässt), sondern indem man sie aus Beispielen ableitet. Dazu können am besten zunächst typische Beispiele gewählt werden, die den Schluss auf die abstrakte Regel oder den abstrakten Begriff leicht erscheinen lassen. Danach müssen jedoch „Grenzfälle“ folgen, die nicht besonders typisch erscheinen, aber trotzdem in die gleiche Kategorie (Beispiel der Regel oder des Begriffs) gehören, um die Reichweite dieser Kategorie auszuschärfen. Dazu können auch Grenzfälle gehören, die gerade nicht mehr zu der zugrundeliegenden Kategorie gehören.

- Sicherheit von induktiven Schlüssen: Schüler müssen erst lernen, dass die empirische Evidenz für einen induktiven Schluss nicht ausreicht, um diesen allgemeingültig zu beweisen. Die geistige Anstrengung, die das deduktive Schließen von ihnen verlangt, erscheint zunächst unnötig oder übertrieben und insofern ist es schwer, die Schüler dazu zu motivieren, ihre Schlüsse deduktiv abzusichern. Zum Teil kann in der Schule auch im Gegensatz zur universitären Mathematik auf intuitiv (z.B. anhand einer Skizze) begründete Schlüsse zurück gegriffen werden, weil der Anspruch dort geringer ist. Aber mit Hilfe von Beispielen, bei denen die intuitive Begründung fehlschlägt, sollte auch klar gemacht werden, welchen Wert deduktive Schlussfolgerungen für die Mathematik besitzen. Der Grad der assoziativen Kohärenz, der einen starken Eindruck von der Überzeugungskraft eines Schlusses erzeugt, aber gleichzeitig nur auf den eigenen Assoziationen zu diesem Schluss beruht, ist kein verlässliches Maß für die Gültigkeit von Urteilen, Zusammenhängen und Schlüssen.

Es lassen sich sicherlich weitere Phänomene finden, die sich vor dem Hintergrund des statistischen Lernens besser verstehen lassen und wenn Ihnen dazu etwas einfällt, dann schreiben Sie das gerne in die Kommentarspalte.

Wie die Mathematik so weit kommen konnte

Die hier vorgestellte statistische Form des Lernens erlaubt uns das Erkennen von Strukturen nicht nur in unserer Umwelt bei der Kategorisierung von Tieren und Pflanzen oder von Verhaltensweisen, sondern auch in der Mathematik. Sie ist weitgehend eine Operation von System 1 und verfügt damit über riesige Kapazitäten bei der Informationsverarbeitung. Diese können besonders bei der bildlichen Repräsentation von Strukturen effektiv genutzt werden. Für die präzise Formulierung oder Darstellung von Strukturen ist jedoch in der Regel System 2 notwendig, was besonders für symbolische Darstellungen gilt. Ebenso ist es notwendig, um die induktiven Schlüsse deduktiv zu beweisen und sie dadurch abzusichern. So kommt man in der Mathematik nicht um die Beschränkung auf die Ressourcen von System 2 herum, aber die Unterstützung von System 1 ist doch um einiges größer als sie nach dem ersten Blogartikel vielleicht erschien.

Quellen

- Büchter, Andreas und Timo Leuders (2014): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. 14. Auflage. Cornelsen.

- Dehaene, Stanislas (2011): The Number Sense. How the Mind creates Mathematics. Revised and Updated Edition. Oxford University Press.

- Frith, Chris (2014): Wie unser Gehirn die Welt erschafft. Auflage: 2010. Taschenbuch 2014. Springer Spektrum.

- Kahneman, Daniel (2015): Schnelles Denken, langsames Denken. 14. Auflage. Pantheon-Ausgabe.